

# VARIABILIDAD LATERAL PARA EVALUAR LA VELOCIDAD DE RESPUESTA DE UNA CARTA DE CONTROL DE PROCESOS

## LATERAL VARIABILITY TO EVALUATE THE RESPONSE SPEED OF A PROCESS CONTROL CHART

**Alicia Quintana<sup>1</sup>, Liliana García<sup>1</sup>, Ricardo Casal<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Centro de Estudios de Calidad Total. Departamento de Matemática. Universidad Nacional del Sur. Bahía Blanca. Rep. Argentina.

<sup>2</sup> Departamento de Ingeniería. Universidad Nacional del Sur. Bahía Blanca. Rep. Argentina.

### RESUMEN

La Ingeniería Industrial juega actualmente un rol esencial en el monitoreo de procesos que siguen la metodología Six Sigma. Las Cartas de Control Estadístico permiten monitorearlos periódicamente. La velocidad de su respuesta es evaluada mediante la Longitud de Corrida y merece atención especial, juega un papel determinante en la búsqueda de una carta que se ajuste a las características de producción. La elevada dispersión y marcada asimetría de la Longitud de Corrida hacen que la Variabilidad Total (Coeficiente de Variación) no describa adecuadamente la dispersión de aquella longitud. En publicaciones anteriores, los autores propusieron variabilidades laterales acordes a cada estado del proceso. El objetivo del trabajo es evaluar cuantitativamente las ventajas de su uso. El método empleado fue el análisis de la razón variabilidad lateral/variabilidad total en cartas seleccionadas. Los resultados alcanzados evidencian tales ventajas, se hacen más notorias en el uso de muestras y en el interés por los corrimientos grandes en la media del proceso. Se ilustran dos casos donde se destacan las diferencias entre los criterios convencional y no convencional para evaluar la velocidad de respuesta de una carta.

**Palabras Claves:** Cartas de control, longitud de corrida, monitoreo de procesos, variabilidad lateral

### ABSTRACT

Industrial Engineering currently plays an essential role in the processes monitoring that follow the Six Sigma methodology. Statistical Control Charts allow to monitor them periodically. Its response speed is evaluated by the Run Length and deserves special attention, it plays a decisive role in the search for a Control Chart according to the characteristics of production. The high dispersion and strong skewness of the Run Length do that the Total Variability (Coefficient of Variation) does not adequately describe the dispersion of that length. In previous publications, the authors proposed lateral variabilities suitable for each state of the process. The aim of this work is to evaluate quantitatively the advantages of its use. The used method was the analysis of the ratio lateral variability/total variability in selected charts. The results achieved demonstrate such benefits, these are most noticeable in the use of samples and

in the interest by the large shifts in the process mean. Two cases are illustrated where one emphasizes the differences between the conventional and unconventional criteria to evaluate the response speed of a Control Chart.

**Keywords:** Control charts, run length, processes monitoring, lateral variability

## INTRODUCCIÓN

Actualmente, la apertura de la economía mundial y la globalización de los sistemas productivos imponen estándares de calidad cada vez más altos en la manufactura. La Ingeniería Industrial no escapa a esta realidad; por el contrario, desempeña una función cada vez más comprometida en las empresas. Esto se ve reflejado en los diversos cambios que, desde hace años, sus prácticas diarias vienen experimentando, especialmente en lo que se refiere a la optimización de procesos críticos. Se destaca un uso mucho más intensivo de técnicas estadísticas, a raíz de la necesidad de incorporar el Control Estadístico de Procesos (CEP) a las áreas prioritarias de trabajo de los ingenieros industriales.

El CEP se presenta actualmente como un requisito fundamental de toda empresa que encare la competitividad de los mercados globalizados a través de un programa de calidad Six Sigma, implementado en su estructura organizacional (Gutiérrez & de la Vara, 2004). Entre los principales objetivos del CEP está la reducción de la variabilidad de los procesos críticos de una empresa. Para ello se nutre de una gran diversidad de herramientas estadísticas.

Las Cartas de Control aparecen como las técnicas estadísticas más distinguidas del CEP. Se trata de métodos gráficos de diagnóstico usados para monitorear el funcionamiento de los procesos a través del tiempo, mediante la detección de posibles cambios (corrimientos o desplazamientos de su valor nominal) en sus principales parámetros (características claves de calidad para el óptimo desempeño del proceso) como, por ejemplo, la media del proceso. (Montgomery, 2004).

De la observación de la carta y mediante reglas preestablecidas (con base estadística) surge una de dos conclusiones: el proceso está bajo control (BC) si sus parámetros no han sufrido cambios, en cuyo caso el proceso sigue su curso; o fuera de control (FC), si sus parámetros han sufrido cambios, para lo cual la carta emite una señal de alerta, con una consecuente toma de acciones correctivas, preventivas y de mejora, para restablecer el proceso a su normal funcionamiento si el cambio fue perjudicial, o conducirlo a un desempeño aún más deseable que el anterior si el cambio operado fue beneficioso.

La teoría general de las Cartas de Control se remonta al año 1924, de la mano del Dr. Walter Shewhart; por este motivo, son conocidas como las Cartas de Shewhart. Con el correr de los años, los adelantos tecnológicos y los nuevos requerimientos de calidad en productos y servicios han impulsado la aparición de procesos cada vez más complejos, creando así la necesidad de contar con otros diseños de cartas que se adapten a las condiciones y necesidades de los nuevos procesos. De este modo surgen los diseños CUSUM, EWMA, cartas para datos autocorrelacionados, cartas multivariadas, etc. En particular, para una descripción completa de las cartas CUSUM puede consultarse a Hawkins & Olwell (1998).

Durante la implementación del CEP, una etapa importante a definir es la elección de la Carta de Control más adecuada a las características de cada proceso. Para ello es fundamental conocer de antemano qué se puede esperar de la carta cuando el proceso está BC y FC. La

performance, eficiencia o desempeño de una Carta de Control se evalúa en términos de su velocidad de respuesta para detectar un cambio en algún parámetro crítico del proceso.

Tradicionalmente, la performance de una carta se mide con la Longitud de Corrida Promedio (LCP). Representa el N° promedio de puntos que es necesario graficar desde que ocurre un cambio en el proceso hasta que la carta lo detecta. Aun cuando el proceso esté BC, la carta puede igualmente emitir una señal, en cuyo caso se habla de una señal de falsa alarma y LCP representa entonces la Longitud de Falsa Alarma Promedio.

Es sabido, sin embargo, que la variable aleatoria Longitud de Corrida (LC) está afectada de una alta variabilidad (Ryan, 2011). Esto implica que el mero uso de la LCP para evaluar la velocidad de respuesta de una carta no permite reflejar el real comportamiento de la carta. Como consecuencia, en la literatura especializada existen diferentes propuestas. Muchos autores como Luceño & Puig-Pey (2000) y Chakraborti (2007) han resuelto este problema acompañando la LCP con otras medidas de resumen como el desvío estándar, la mediana, los cuartiles y algunos percentiles de la LC. Otros como Fu *et al.*, 2003 y Chakraborti & Human (2006) han investigado la distribución de probabilidad de la LC. Govindaraju (2005) y Govindaraju & Zhang (2006) han propuesto otras medidas promedio alternativas a la LCP.

Otra propuesta de los autores de este trabajo es acompañar el promedio LCP con una medida de dispersión como su coeficiente de variación  $VTot$ . Se trata de una medida usual de variabilidad global, que representa la variabilidad total que sufre la variable LC en torno a su valor promedio, medida en términos porcentuales. Por este motivo se convino en este trabajo llamar Variabilidad Total a  $VTot$ . Este es más conveniente que el desvío estándar de la LC, porque permite comparar la performance de varios diseños de cartas. Se decidió aquí agrupar las medidas LCP y  $VTot$  bajo la denominación Criterio Convencional (CC).

Aun cuando se use un promedio y una medida de variabilidad global para evaluar con más certeza la performance de una carta, todavía persiste el problema de que la distribución de probabilidad de LC presenta una marcada asimetría hacia la derecha, lo que conlleva a los autores de este trabajo a pensar que el uso de una medida de dispersión "global" no representa un indicador totalmente adecuado en este tipo de circunstancias (Ryan, 2011; Radson & Hancock, 2005).

En Quintana *et al.*, 2009 se presentó una solución no convencional para evaluar la performance de una Carta de Control. El énfasis de la investigación fue puesto en el análisis de la variabilidad de la LC, para lo cual se expresó la  $VTot$  en función de dos componentes de variabilidad, provenientes de dos fuentes de variación: de las longitudes de corrida inferiores y superiores a LCP. Por esta razón fueron llamadas variabilidades laterales. Sobre esta base se propusieron medidas de resumen acordes a cada estado del proceso (BC y FC) que acompañen a la usual LCP. Se decidió agruparlas bajo la denominación Criterio No Convencional (CNC).

Sin embargo, si bien en Quintana, op. cit., se demostró la identidad matemática que relaciona  $VTot$  con sus correspondientes variabilidades laterales, aún no se ha analizado en profundidad qué tanto difieren estas cantidades entre sí en diseños concretos, y bajo qué circunstancias la brecha se torna significativa o altamente significativa como para justificar y recomendar aún más su uso.

El objetivo del presente trabajo es evaluar cuantitativamente las ventajas del uso de variabilidades laterales para analizar la dispersión en la velocidad de respuesta de una Carta de Control, y determinar además bajo qué condiciones es aún más recomendable su uso. La hipótesis de trabajo es que la variabilidad lateral ayuda a explorar la performance de una Carta de Control con mayor precisión que  $VTot$ . Se presentan además dos casos ilustrativos donde

se comparan las conclusiones que surgen del uso de uno y otro criterio para destacar las bondades del CNC, a la hora de elegir la Carta de Control más conveniente.

## METODOLOGÍA

### Breve descripción de las Cartas de Control

La Carta de Control Bilateral permite detectar corrimientos, tanto hacia arriba como abajo del parámetro de interés a monitorear. Para ello, a intervalos de tiempo (regulares o no) se toman lecturas (individuales o muestrales) del proceso, que son volcadas a uno o dos estadísticos (Estadísticos de Control), dependiendo del tipo de carta. Los valores resultantes son representados mediante puntos graficados sobre la carta, para luego compararlos con tres líneas de control horizontales (superior, inferior y central) y concluir, mediante reglas preestablecidas, que el proceso está BC o FC. Los estadísticos, líneas y reglas son determinados bajo principios estadísticos. La línea de control superior (a la línea central) sirve para detectar cambios hacia arriba del valor nominal del parámetro y, la inferior, para corrimientos hacia abajo.

Cuando el parámetro de interés a monitorear es la media del proceso, es habitual expresar los corrimientos  $D$  en función del desvío estándar  $\sigma$  del proceso. En este caso, la LCP se calcula para cada estado del proceso y cada corrimiento  $D$  posible. Los procesos normales, es decir, los que se ajustan a la distribución de probabilidad Normal (o Gauss), son habituales en la industria. En la literatura especializada existen diversos diseños de cartas para monitorear la media de un proceso normal.

Las cartas tradicionales de Shewhart trabajan con límites de control ubicados a  $\pm 3$  errores estándar de la línea central, lo que permite obtener una LCP de aproximadamente 370 puntos graficados, cuando el proceso está BC. Este resultado surge del hecho de que, en este tipo de cartas, la variable LC sigue una distribución de probabilidad geométrica y, por ende, la LCP y otras características de la LC, como su desvío estándar, pueden ser calculadas exactamente a partir de este modelo (Montgomery, 2004).

Otras cartas de particular interés son las cartas CUSUM, muy veloces para detectar pequeños cambios en el parámetro a monitorear. Su diseño es más complejo que las cartas de Shewhart, sus Estadísticos de Control son sumas acumuladas que recogen información de las lecturas anteriores y la actual. Habitualmente se inicializan en 0, pero, bajo ciertas circunstancias, las cartas CUSUM son aún más veloces cuando comienzan en un valor diferente de 0, en cuyo caso reciben el nombre de cartas CUSUM con FIR (Lucas & Crosier, 2000).

En el enfoque numérico, los límites de control de cualquier carta CUSUM se ubican a  $\pm h$  errores estándar de la línea central. Por ello, el parámetro " $h$ " recibe el nombre de "límite de decisión" y se determina en función de 2 valores: del corrimiento  $D$  que se desea detectar como mínimo en la media del proceso y de la LCP que se tolere cuando el proceso está BC. Para el cálculo de la LCP en las cartas CUSUM, el modelo de probabilidad geométrico no es adecuado para la variable LC. Luego, es necesario recurrir a métodos aproximados disponibles en la literatura especializada para estimar LCP y otras características de la LC. Se puede optar, por ejemplo, por la simulación estocástica.

### Alcance del trabajo

El objetivo del monitoreo es detectar corrimientos  $D$  en la media de procesos normales que oscilan entre 0 y  $3\sigma$ . Todas las cartas contempladas en este trabajo son bilaterales y sus

límites de control fueron determinados para proporcionar una LCP de 370 puntos, cuando el proceso está BC. La razón de este valor radica en que las cartas de Shewhart tradicionales tienen una LCP igual a él para un proceso BC, y es comúnmente utilizado a la hora de realizar comparaciones entre varios diseños de cartas, como CUSUM. Se supone, además, que la toma de lecturas individuales o muestrales se realiza a intervalos regulares de tiempo.

Los diseños de cartas que se contemplaron en este trabajo son:

- S1: carta Shewhart con toma de lecturas individuales en cada inspección
- S4: carta Shewhart con toma de muestras de  $n = 4$  lecturas en cada inspección
- C1: carta CUSUM con toma de lecturas individuales en cada inspección
- C4: carta CUSUM con toma de muestras de  $n = 4$  lecturas en cada inspección
- C1FIR: carta CUSUM con FIR con toma de lecturas individuales en cada inspección
- C4FIR: carta CUSUM con FIR con toma de muestras de  $n = 4$  lecturas en cada inspección

### Relación entre las Variabilidades Total y Laterales

A continuación se describen sintéticamente las medidas de resumen no convencionales propuestas en Quintana, op. cit., donde se prueba que la usual  $VTot$  proviene de 2 fuentes de variación: de las corridas con longitudes inferiores y superiores al promedio LCP. Esto permite descomponer la  $VTot$  como sigue, para cada corrimiento  $D$  en la media del proceso:

$$VTot^2 = PCC * VIzq^2 + PCL * VDer^2$$

Siendo:

PCC = Proporción de Corridas Cortas

PCL = Proporción de Corridas Largas

$PCC + PCL = 1$

$VIzq$  = Variabilidad Izquierda = Coeficiente de Variación a Izquierda de la LCP

$$VIzq = \frac{DIzq}{LCP} * 100$$

$DIzq$  = Desvío Estándar a Izquierda de LCP

$VDer$  = Variabilidad Derecha = Coeficiente de Variación a Derecha de la LCP

$$VDer = \frac{DDer}{LCP} * 100$$

$DDer$  = Desvío Estándar a Derecha de LCP

Los componentes de la identidad anterior se miden de acuerdo al estado del proceso:

❖ *En el caso de un proceso BC:*

$$PCC = P(LC < LCP) \quad PCL = P(LC \geq LCP) \quad (*)$$

$$DIzq = \sqrt{\sum_{lc < LCP} (lc - LCP)^2 \cdot P(LC = lc / LC < LCP)} \quad (**)$$

$$DDer = \sqrt{\sum_{lc \geq LCP} (lc - LCP)^2 \cdot P(LC = lc / LC \geq LCP)} \quad (**)$$

❖ En el caso de un proceso FC:

$$PCC = P(LC \leq LCP) \quad PCL = P(LC > LCP) \quad (*)$$

$$DIzq = \sqrt{\sum_{lc \leq LCP} (lc - LCP)^2 \cdot P(LC = lc / LC \leq LCP)} \quad (**)$$

$$DDer = \sqrt{\sum_{lc > LCP} (lc - LCP)^2 \cdot P(LC = lc / LC > LCP)} \quad (**)$$

(\*) El operador  $P(\cdot)$  representa probabilidad

(\*\*) El operador  $P(\cdot/\cdot)$  representa probabilidad condicional

### Importancia de las Variabilidades Laterales según el estado del proceso

Cuando la distribución de probabilidad de la variable LC es simétrica,  $VTot = VDer = VIzq$ , independientemente del estado del proceso. Sin embargo, dado que la distribución de probabilidad de la variable LC es asimétrica hacia la derecha, cualquiera sea el estado del proceso, las variabilidades laterales no contribuyen en iguales proporciones a  $VTot$  sino, por el contrario,  $VIzq < VTot < VDer$ .

Por otra parte,  $VDer$  y  $VIzq$  no revisten la misma importancia para ambos estados del proceso. No toda la variabilidad contenida en  $VTot$  es perjudicial. Teniendo en cuenta que la carta se torna más eficiente cuando, en lo que respecta a LCP, mayor sea este valor para un proceso BC y menor sea para un proceso FC, se puede deducir lo siguiente:

❖ En el caso de un proceso BC, las corridas con longitudes superiores al valor esperado LCP contribuyen favorablemente a engrosar  $VTot$ . Luego, el hecho de que  $VDer$  sea grande no afecta. En cambio, las corridas con longitudes inferiores a LCP preocupan.  $VIzq$  es el único componente realmente perjudicial; incrementa  $VTot$ , desfavorablemente.

❖ En el caso de un proceso FC, la situación es a la inversa. Las corridas con longitudes inferiores al valor esperado LCP son bienvenidas. Luego, el hecho de que  $VIzq$  sea grande no inquieta. Caso contrario ocurre con las corridas con longitudes superiores a LCP.  $VDer$  es el único componente verdaderamente desfavorable; incrementa  $VTot$ , contaminándola.

En resumen,  $VDer$  y  $VIzq$  alternan sus papeles según el estado en que se encuentre el proceso: si el proceso está BC,  $VIzq$  es desfavorable y  $VDer$ , favorable. En cambio, si el proceso está FC,  $VIzq$  es favorable y  $VDer$ , desfavorable.

## Medidas de Resumen para evaluar la Performance de una Carta de Control

De lo analizado se puede concluir que la LCP y la Vlzq son indicadores adecuados para evaluar la performance de una Carta de Control de un proceso que está BC. En cambio, la LCP y la VDer son los adecuados cuando el proceso está FC.

Resulta conveniente considerar un tercer indicador para completar la evaluación de la performance de una Carta de Control. Se trata de un indicador de proporción. Más precisamente la PCC, cuando el proceso está BC y la PCL, cuando está FC. La necesidad de estas proporciones se justifica en la ventaja de incorporar una medida que evalúe el grado de incidencia de valores altos de VDer y Vlzq frente a un proceso FC y BC, respectivamente.

Por ejemplo, si el proceso está FC, no es lo mismo una carta con una VDer alta y una PCL alta que una con una VDer alta y una PCL baja. El primer caso es mucho más preocupante que el segundo, porque señala una alta probabilidad de ocurrencia de corridas largas. En cambio, el segundo caso indica una baja probabilidad de ellas; es decir, el valor alto en VDer se ve atenuado con una baja probabilidad de ocurrencia de corridas largas. Un análisis análogo puede hacerse para mostrar la necesidad de la PCC para un proceso BC.

En resumen, para evaluar la performance de una Carta de Control se recomiendan las siguientes medidas de resumen, calculadas para cada corrimiento D en la media del proceso y agrupadas bajo la denominación Criterio No Convencional (CNC):

- ❖ *Para un proceso BC:* la LCP, la Vlzq y la PCC
- ❖ *Para un proceso FC:* la LCP, la VDer y la PCL

## Cálculo de las Medidas de Resumen

En las cartas de Shewhart, las medidas de resumen propuestas para cada estado del proceso fueron calculadas a partir del modelo de probabilidad geométrica que sigue la variable LC. En cambio, en las cartas CUSUM, aquel modelo no es adecuado, como ya se mencionó. Se optó entonces por estimarlas mediante simulación estocástica. Para cada tipo de carta y corrimiento D contemplados se realizaron 30000 simulaciones. Para llevarlas a cabo fue necesario encontrar previamente buenos estimadores de las medidas de resumen propuestas, cuyas expresiones se presentan a continuación. La condición de "buen estimador" fue demostrada en Quintana, op. cit..

*Para un proceso BC, para cada corrimiento D:*

$$LCP_{est} = \frac{\sum_{i=1}^n lc}{n} \quad Vlzq_{est} = \frac{Dlzq_{est}}{LCP_{est}} \quad Dlzq_{est} = \sqrt{\sum_{lc: lc < LCP} (lc - LCP_{est})^2 \frac{n_{lc}}{n_1}} \quad PCC_{est} = \frac{n_1}{n}$$

Siendo:

n = n° de corridas (simulaciones) a ejecutar

lc = longitud de falsa alarma de una corrida

n<sub>1</sub> = n° de corridas entre n con longitud de falsa alarma LC < LCP

n<sub>lc</sub> = n° de corridas entre n<sub>1</sub> con longitud de falsa alarma = lc

n<sub>lc</sub> / n<sub>1</sub> estima la probabilidad condicional P(LC = lc / LC < LCP)



Para un proceso FC, para cada corrimiento D:

$$LCP_{est} = \frac{\sum_{i=1}^n l_c}{n} \quad VDer_{est} = \frac{DDer_{est}}{LCP_{est}} \quad DDer_{est} = \sqrt{\sum_{l_c: l_c > LCP} (l_c - LCP_{est})^2 \frac{n_{l_c}}{n_D}} \quad PCL_{est} = \frac{n_D}{n}$$

Siendo:

$l_c$  = longitud de una corrida

$n_D$  = n° de corridas entre n con longitud de corrida  $LC > LCP$

$n_{l_c}$  = n° de corridas entre  $n_D$  con longitud de corrida =  $l_c$

$n_{l_c} / n_D$  estima la probabilidad condicional  $P(LC = l_c / LC > LCP)$

### Razón Variabilidad Lateral / Variabilidad Total

El propósito de este trabajo es evaluar cuantitativamente la ventaja de contar con un indicador como la variabilidad lateral a la hora de analizar la dispersión en la velocidad de respuesta de una carta. Para ello se convino en cuantificar su utilidad construyendo un índice, para cada estado del proceso, que exprese qué tan relevante es la información adicional que aporta la variabilidad lateral al análisis de la performance de una carta. Para ello se consideró conveniente plantear la razón Variabilidad Lateral / Variabilidad Total para cada corrimiento D de la media del proceso y para los estados del proceso BC y FC, respectivamente:

$$I_{BC}(D) = \frac{Vl_{zq}(D)}{VTot(D)} \quad I_{FC}(D) = \frac{VDer(D)}{VTot(D)}$$

Dado que la distribución de probabilidad de LC es asimétrica hacia la derecha, es de esperar que  $I_{BC}(D) < 1$  e  $I_{FC}(D) > 1$ . Si el índice es igual al valor 1, la variabilidad lateral es igual a VTot y, por lo tanto, su utilidad es nula, su conocimiento no aporta información adicional relevante acerca de la dispersión de la LC de la carta.

En cambio, cuanto más difiere el valor del índice del valor 1, su grado de importancia crece, más relevante es la información adicional que brinda la variabilidad lateral, mayor es la calidad de su aporte y utilidad, y más justificamos su uso para disponer de un conocimiento más completo, profundo y preciso sobre la dispersión de la LC de una carta.

VTot es un indicador global de dispersión que oculta en cuánto contribuye cada componente de variación. En cambio, la variabilidad lateral, elegida convenientemente para cada estado del proceso, mide específicamente el componente de variación que engrosa desfavorablemente VTot; en conclusión, el componente que se desea reducir.

Por ejemplo, un índice  $I_{FC}(D) = 1.5$  significa que, para ese corrimiento D, la VDer es 50% superior a la VTot correspondiente, indicando ésto que la variabilidad desfavorable es sustancialmente mayor a la que muestra la VTot, luego el comportamiento de la carta es peor de lo que se percibe con la única lectura de la VTot.

Como un segundo ejemplo, un índice  $I_{FC}(D) = 0.60$  señala que, para ese corrimiento, la VDer es un 40% inferior a la correspondiente VTot. Esto indica que la variabilidad desfavorable es significativamente menor a la que exhibe la VTot; por ende, el desempeño de la carta es mejor de lo que surge con la lectura de la VTot.



## RESULTADOS

### Performance de las Cartas de Control elegidas

Las medidas de resumen convencionales y no convencionales fueron computadas para las cartas mencionadas en la sección Metodología, y sus resultados se expusieron en Quintana, op. cit. Los mismos se transcriben a las tablas 1 a 7, una para cada corrimiento D contemplado: tabla 1 (para  $D = 0.25 \sigma$ ), tabla 2 (para  $D = 0.50 \sigma$ ), tabla 3 (para  $D = 1 \sigma$ ), tabla 4 (para  $D = 1.5 \sigma$ ), tabla 5 (para  $D = 2 \sigma$ ), tabla 6 (para  $D = 2.5 \sigma$ ), tabla 7 (para  $D = 3 \sigma$ ).

Los cálculos para las cartas Shewhart son exactos, en virtud del modelo de probabilidad geométrico que sigue la variable LC. En cambio, para las cartas CUSUM, no. Las 30000 simulaciones realizadas para cada corrimiento D permitieron alcanzar los resultados que se exponen, con los siguientes errores máximos de muestreo, en todo los casos con una confianza del 99%: 1.5%, para la estimación del promedio LCP, 1% para el desvío estándar de la LC, y 0.7% para las proporciones PCL y PCC.

**Tabla 1.** Performance de las cartas para detectar un corrimiento  $D = 0.25 \sigma$

		S1	S4	C1 h = 12.09	C4 h = 8.004	C1FIR h = 12.905	C4FIR h = 8.28
BC	LCP	370.40	370.40	370.45	370.45	370.25	370.48
	Vlzq	64.56	64.56	58.88	61.78	70.94	70.18
	PCC	63.22	63.22	63.17	63.08	63.93	63.39
	VTot	99.86	99.86	90.61	95.39	112.46	110.15
FC	LCP	281.15	155.22	74.89	28.82	51.30	18.39
	VDer	141.25	141.09	86.20	76.92	130.35	119.72
	PCL	36.74	36.72	38.70	40.18	35.30	35.61
	VTot	99.82	99.67	63.69	58.28	89.35	82.68

**Tabla 2.** Performance de las cartas para detectar un corrimiento  $D = 0.50 \sigma$

		S1	S4	C1 h = 7.995	C4 h = 4.77	C1FIR h = 8.272	C4FIR h = 4.854
BC	LCP	370.40	370.40	370.47	370.30	370.47	370.52
	Vlzq	64.56	64.56	61.93	63.51	70.32	68.69
	PCC	63.22	63.22	63.01	63.16	63.51	63.24
	VTot	99.86	99.86	95.72	97.99	110.60	106.61
FC	LCP	155.22	43.89	28.63	9.89	18.36	6.17
	VDer	141.09	139.17	76.71	67.59	120.16	110.69
	PCL	36.72	37.12	39.71	42.73	35.45	33.76
	VTot	99.67	98.85	57.85	53.29	82.68	74.71

**Tabla 3.** Performance de las cartas para detectar un corrimiento  $D = 1 \sigma$

		S1	S4	C1 h = 4.764	C4 h = 2.515	C1FIR h = 4.845	C4FIR h = 2.537
BC	LCP	370.40	370.40	370.21	370.30	370.19	370.30
	Vlzq	64.56	64.56	63.37	64.17	68.48	66.95
	PCC	63.22	63.22	63.29	63.26	63.34	63.31
	VTot	99.86	99.86	97.96	99.16	106.04	103.87
FC	LCP	43.89	6.3	9.90	3.26	6.21	2.12
	VDer	139.17	132.19	67.15	67.91	109.43	102.10
	PCL	37.12	35.47	43.17	34.79	34.17	27.75
	VTot	98.85	91.72	53.16	48.83	74.50	63.26

**Tabla 4.** Performance de las cartas para detectar un corrimiento  $D = 1.5 \sigma$ 

		S1	S4	C1 h = 3.332	C4 h = 1.602	C1FIR h = 3.371	C4FIR h = 1.611
<b>BC</b>	<b>LCP</b>	<b>370.40</b>	<b>370.40</b>	<b>370.45</b>	<b>370.18</b>	<b>370.34</b>	<b>370.69</b>
	<b>Vizq</b>	<b>64.56</b>	<b>64.56</b>	<b>64.23</b>	<b>64.70</b>	<b>67.66</b>	<b>66.14</b>
	<b>PCC</b>	<b>63.22</b>	<b>63.22</b>	<b>63.02</b>	<b>63.05</b>	<b>63.19</b>	<b>63.02</b>
	<b>VTot</b>	99.86	99.86	98.87	99.65	104.62	102.00
<b>FC</b>	<b>LCP</b>	<b>14.96</b>	<b>2</b>	<b>5.19</b>	<b>1.72</b>	<b>3.28</b>	<b>1.31</b>
	<b>VDer</b>	<b>134.46</b>	<b>122.47</b>	<b>70.33</b>	<b>51.23</b>	<b>102.01</b>	<b>84.27</b>
	<b>PCL</b>	<b>37.98</b>	<b>25</b>	<b>35.97</b>	<b>54.22</b>	<b>33.70</b>	<b>24.78</b>
	<b>VTot</b>	96.60	70.71	50.89	47.22	69.25	46.73

**Tabla 5.** Performance de las cartas para detectar un corrimiento  $D = 2 \sigma$ 

		S1	S4	C1 h = 2.513	C4 h = 1.016	C1FIR h = 2.534	C4FIR h = 1.019
<b>BC</b>	<b>LCP</b>	<b>370.40</b>	<b>370.40</b>	<b>370.10</b>	<b>370.31</b>	<b>370.01</b>	<b>370.30</b>
	<b>Vizq</b>	<b>64.56</b>	<b>64.56</b>	<b>64.40</b>	<b>64.89</b>	<b>67.15</b>	<b>65.54</b>
	<b>PCC</b>	<b>63.22</b>	<b>63.22</b>	<b>63.23</b>	<b>62.81</b>	<b>63.23</b>	<b>62.83</b>
	<b>VTot</b>	99.86	99.86	99.50	99.62	104.02	100.73
<b>FC</b>	<b>LCP</b>	<b>6.3</b>	<b>1.19</b>	<b>3.27</b>	<b>1.18</b>	<b>2.13</b>	<b>1.07</b>
	<b>VDer</b>	<b>132.19</b>	<b>93.08</b>	<b>67.34</b>	<b>80.59</b>	<b>102.99</b>	<b>96.98</b>
	<b>PCL</b>	<b>35.47</b>	<b>15.86</b>	<b>35.26</b>	<b>16.49</b>	<b>28.08</b>	<b>6.93</b>
	<b>VTot</b>	91.72	39.83	48.84	35.53	64.12	26.40

**Tabla 6.** Performance de las cartas para detectar un corrimiento  $D = 2.5 \sigma$ 

		S1	S4	C1 h = 1.985	C4 h = 0.502	C1FIR h = 1.998	C4FIR h = 0.503
<b>BC</b>	<b>LCP</b>	<b>370.40</b>	<b>370.40</b>	<b>370.58</b>	<b>370.65</b>	<b>370.82</b>	<b>370.76</b>
	<b>Vizq</b>	<b>64.56</b>	<b>64.56</b>	<b>64.55</b>	<b>64.82</b>	<b>66.57</b>	<b>65.03</b>
	<b>PCC</b>	<b>63.22</b>	<b>63.22</b>	<b>63.05</b>	<b>62.94</b>	<b>63.09</b>	<b>62.93</b>
	<b>VTot</b>	99.86	99.86	98.85	99.79	102.17	100.07
<b>FC</b>	<b>LCP</b>	<b>3.24</b>	<b>1.02</b>	<b>2.29</b>	<b>1.02</b>	<b>1.59</b>	<b>1.01</b>
	<b>VDer</b>	<b>124.42</b>	<b>98.88</b>	<b>67.64</b>	<b>98.50</b>	<b>75.61</b>	<b>100.06</b>
	<b>PCL</b>	<b>33.06</b>	<b>2.27</b>	<b>33.91</b>	<b>2.36</b>	<b>40.58</b>	<b>1.26</b>
	<b>VTot</b>	83.15	15.08	48.59	15.32	56.12	11.30

**Tabla 7.** Performance de las cartas para detectar un corrimiento  $D = 3 \sigma$ 

		S1	S4	C1 h = 1.603	C4 h = 0.001	C1FIR h = 1.611	C4FIR h = 0.001
<b>BC</b>	<b>LCP</b>	<b>370.40</b>	<b>370.40</b>	<b>370.21</b>	<b>370.82</b>	<b>370.69</b>	<b>370.82</b>
	<b>Vizq</b>	<b>64.56</b>	<b>64.56</b>	<b>64.55</b>	<b>64.83</b>	<b>65.94</b>	<b>64.83</b>
	<b>PCC</b>	<b>63.22</b>	<b>63.22</b>	<b>63.08</b>	<b>62.93</b>	<b>63.09</b>	<b>62.93</b>
	<b>VTot</b>	99.86	99.86	99.06	99.85	101.60	99.85
<b>FC</b>	<b>LCP</b>	<b>2</b>	<b>1.00</b>	<b>1.73</b>	<b>1.00</b>	<b>1.31</b>	<b>1.00</b>
	<b>VDer</b>	<b>122.47</b>	<b>99.93</b>	<b>51.62</b>	<b>99.68</b>	<b>84.98</b>	<b>99.68</b>
	<b>PCL</b>	<b>25</b>	<b>0.13</b>	<b>54.43</b>	<b>0.15</b>	<b>24.60</b>	<b>0.15</b>
	<b>VTot</b>	70.71	3.67	47.40	3.9	46.56	4

### Indices $I_{BC}(D)$ y $I_{FC}(D)$

Para cada carta y corrimiento  $D$  se computaron los valores de los índices  $I_{BC}(D)$  y  $I_{FC}(D)$ . En cuanto a este último, para una mejor apreciación de su comportamiento, los resultados obtenidos se muestran en las figuras 1 a 3 organizadas como sigue: figura 1 (para las cartas

S1, C1 y C1FIR), figura 2 (para las cartas S4, C4 y C4FIR con  $D \leq 1.5\sigma$ ) y figura 3 (para las cartas S4, C4 y C4FIR con  $D > 1.5\sigma$ ).

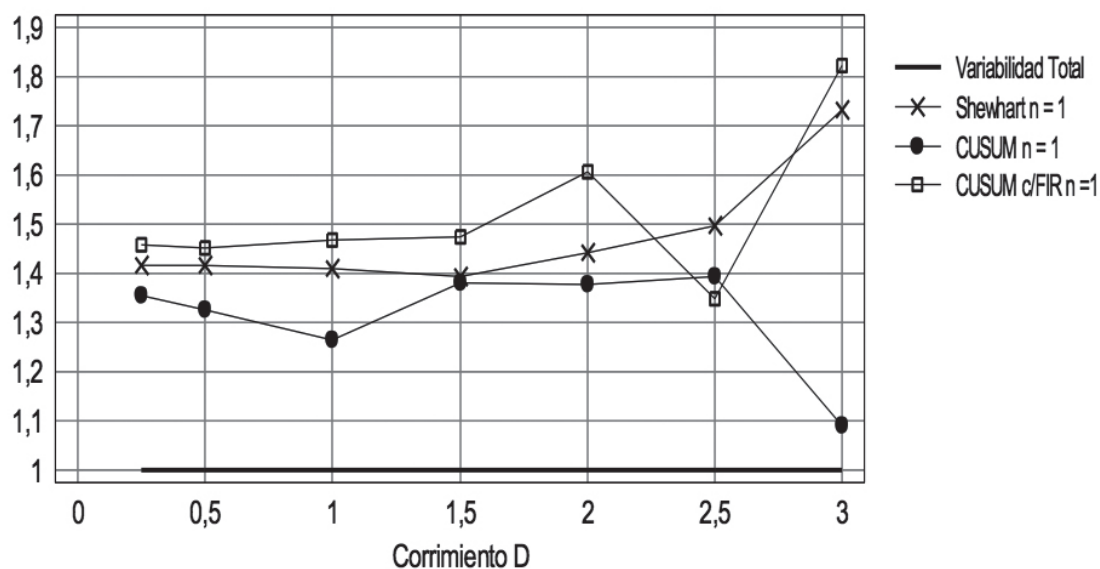


Figura 1. Índice  $I_{FC}(D)$  para las cartas S1, C1 y C1FIR

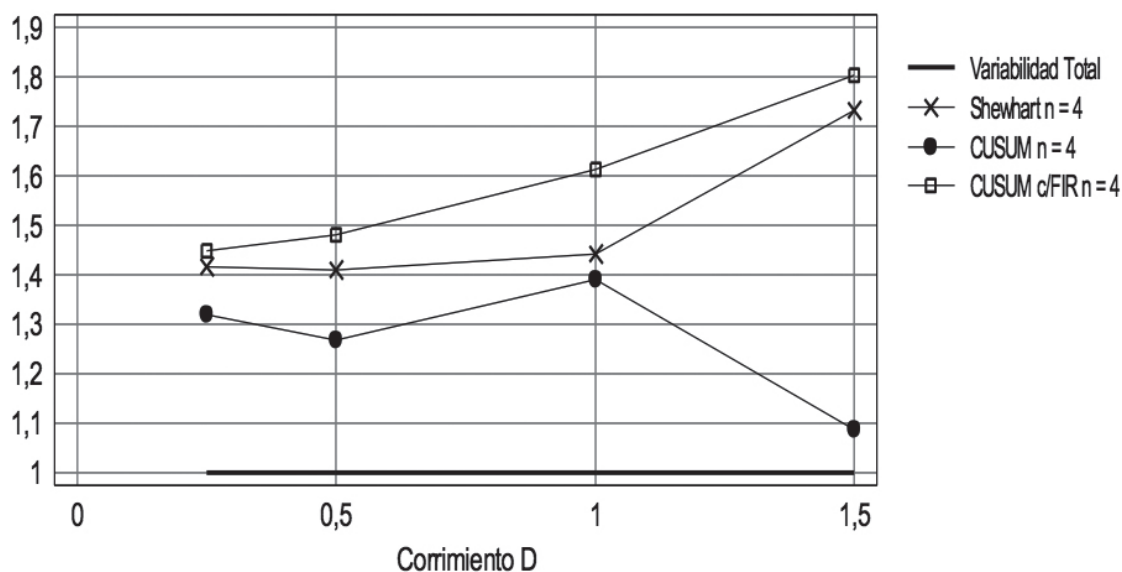


Figura 2.  $I_{FC}(D)$  para las cartas S4, C4 y C4FIR con  $D \leq 1.5\sigma$

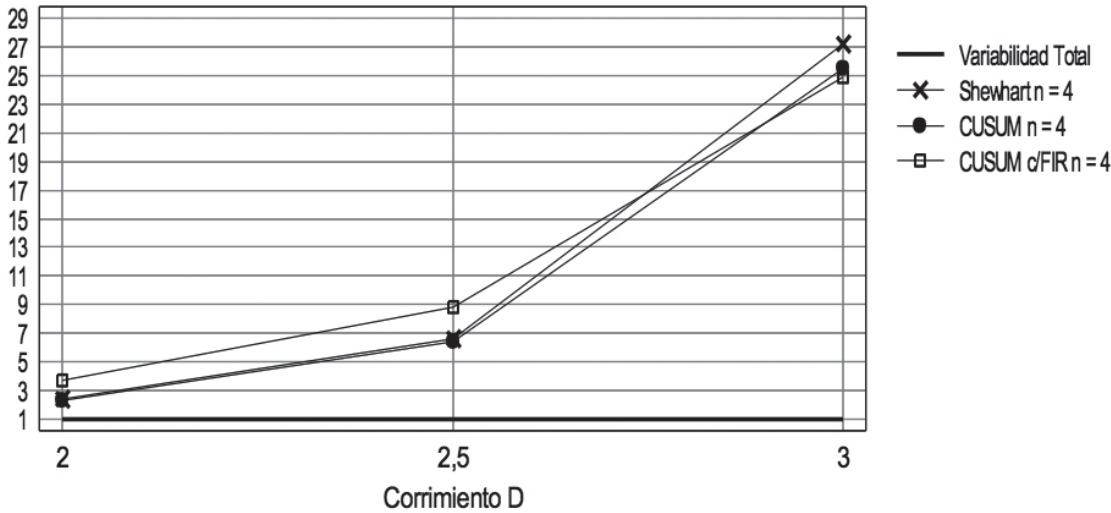


Figura 3.  $I_{FC}(D)$  para las cartas S4, C4 y C4FIR con  $D > 1.5\sigma$

Es objetivo, también, de este trabajo, presentar dos casos ilustrativos para resaltar las diferencias que existen en las conclusiones arrojadas por uno y otro criterio. Para ello se construyeron razones apropiadas.

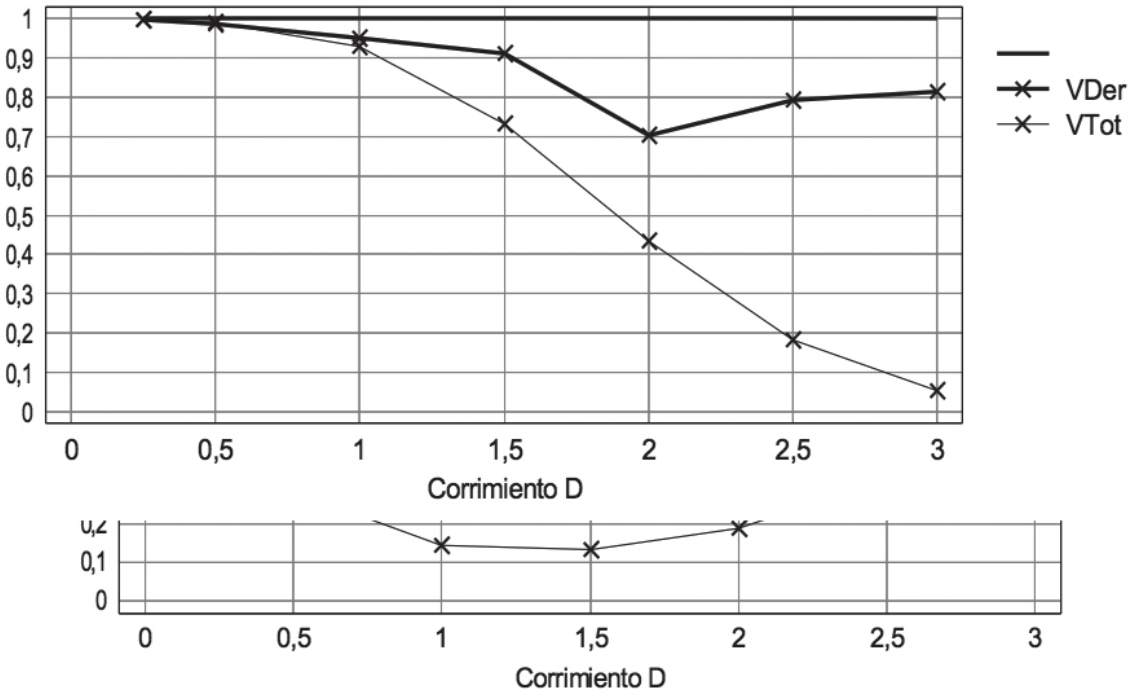
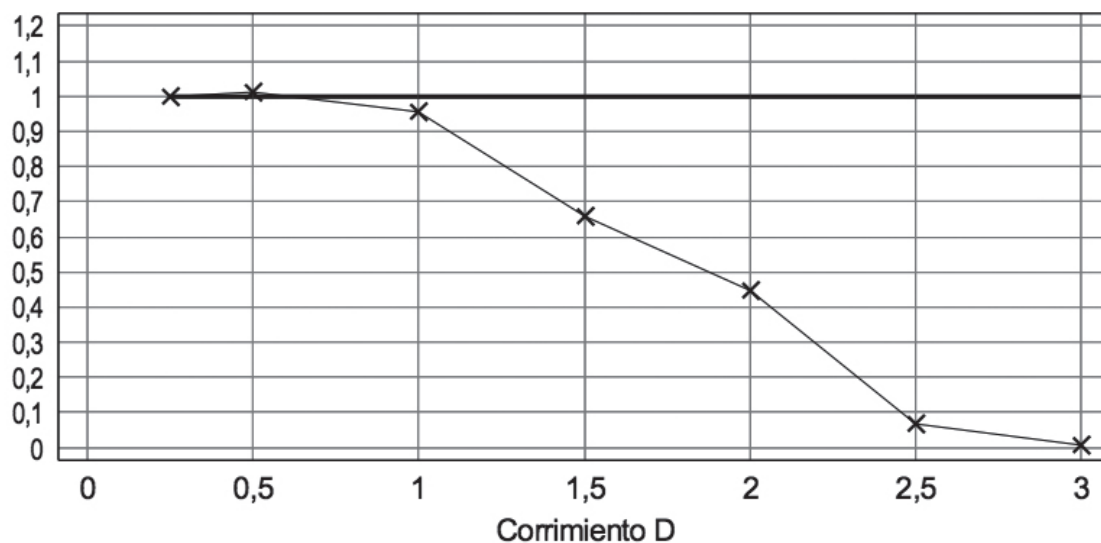


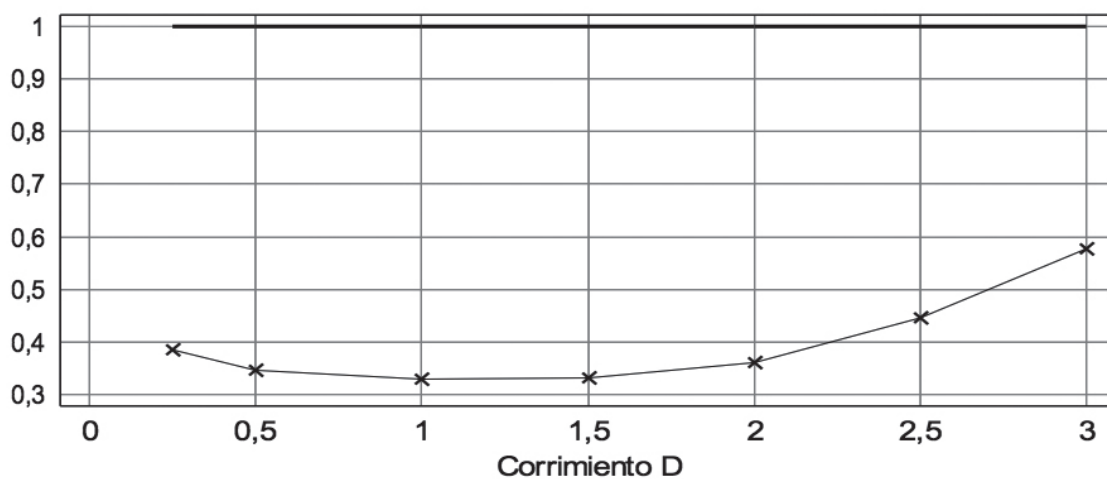
Figura 4. Comparación de S1 y S4: Razón  $LCP_{S4}(D) / LCP_{S1}(D)$  frente al estado FC

### Caso Ilustrativo 1: Comparación de S1 con S4

Se evaluaron y graficaron las razones  $LCP_{S4}(D)/LCP_{S1}(D)$  (Figura 4),  $VDer_{S4}(D)/VDer_{S1}(D)$  y  $VTot_{S4}(D)/VTot_{S1}(D)$  (Figura 5) y  $PCL_{S4}(D)/PCL_{S1}(D)$  (Figura 6) frente al estado del proceso FC para cada corrimiento D considerado.



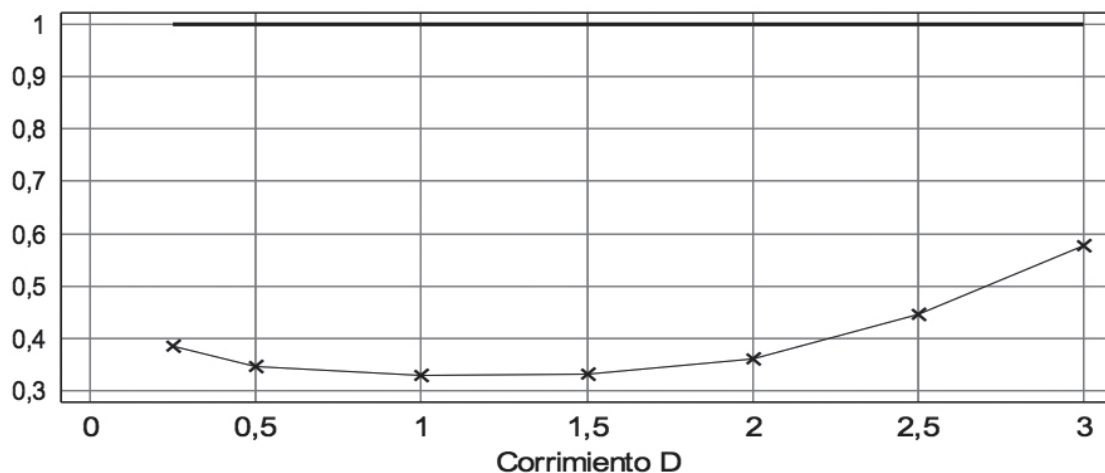
**Figura 5.** Comparación de S1 y S4: Razones  $VDer_{S4}(D)/VDer_{S1}(D)$  y  $VTot_{S4}(D)/VTot_{S1}(D)$  frente al estado FC



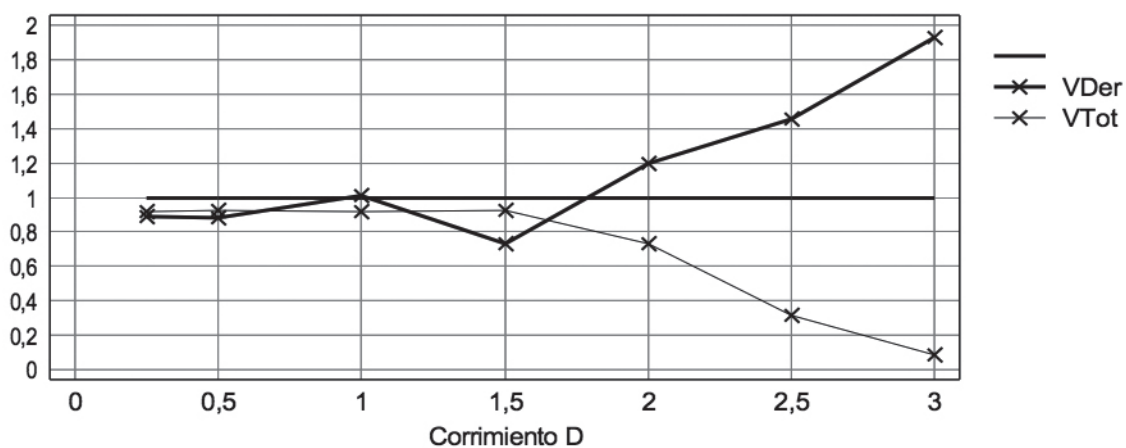
**Figura 6.** Comparación de S1 y S4: Razón  $PCL_{S4}(D) / PCL_{S1}(D)$  frente al estado FC

### Caso Ilustrativo 2: Comparación de C1 con C4

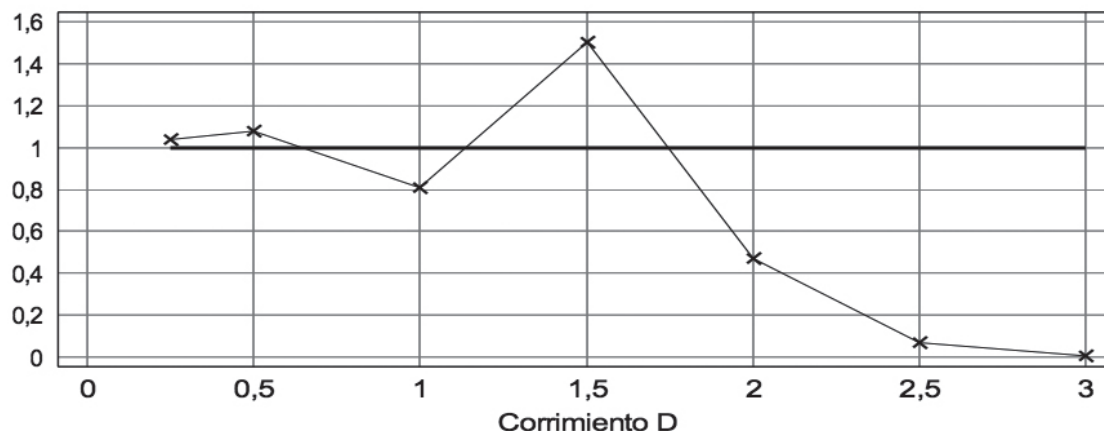
Se evaluaron y graficaron las razones  $LCP_{C4}(D)/LCP_{C1}(D)$  (Figura 7),  $VDer_{C4}(D)/VDer_{C1}(D)$  y  $VTot_{C4}(D)/VTot_{C1}(D)$  (Figura 8) y  $PCL_{C4}(D)/PCL_{C1}(D)$  (Figura 9) frente al estado FC para cada corrimiento D.



**Figura 7.** Comparación de C1 y C4: Razón  $LCP_{C4}(D) / LCP_{C1}(D)$  frente al estado FC



**Figura 8.** Comparación de C1 y C4: Razones  $VDer_{C4}(D)/VDer_{C1}(D)$  y  $VTot_{C4}(D)/VTot_{C1}(D)$  frente al estado FC



**Figura 9.** Comparación de C1 y C4: Razón  $PCL_{C4}(D) / PCL_{C1}(D)$  frente al estado FC

## DISCUSIONES

### Análisis del Índice $I_{BC}(D)$

De un recorrido por las tablas 1 a 7, puede deducirse que el valor del índice  $I_{BC}(D)$  gira en torno a 0.65, independientemente del tipo de carta, valor D o n. Esta similitud era de esperar, dado que los límites de control de todas las cartas fueron ajustados para producir el mismo valor de LCP (370 puntos) cuando el proceso está BC. Un valor  $I_{BC}(D) \cong 0.65$  indica que la  $V_{Izq}$  es inferior a la correspondiente  $V_{Tot}$  en un 35%. Se considera entonces que la variabilidad desfavorable, para un proceso BC, es sensiblemente inferior a la percibida de la lectura de  $V_{Tot}$ .

### Análisis del Índice $I_{FC}(D)$

A diferencia de lo que ocurre con el índice  $I_{BC}(D)$ , de las figuras 1 a 3, se observa que el valor del índice  $I_{FC}(D)$  varía en función del tipo de carta, valor D o n. En todos los casos, su valor es superior a 1; esto era de esperar dada la asimetría positiva que presenta la distribución de probabilidad de la LC. Sin embargo, lo que se destaca es que el índice es significativamente superior a 1, se encuentra por encima de la unidad en un porcentaje sensiblemente alto: la  $V_{Der}$  es superior al 30% en las cartas CUSUM, y al 40% en las cartas Shewhart y CUSUM con FIR, en la mayoría de los casos. Luego, la variabilidad desfavorable, para un proceso FC, es muy superior a la percibida por la lectura de  $V_{Tot}$ . En particular, para muestras ( $n=4$ ), a partir de corrimientos grandes ( $D \geq 1.5\sigma$ ) el valor del índice crece abruptamente en todas las cartas.

### Conclusiones Parciales

La  $V_{Izq}$ , para un proceso BC, y la  $V_{Der}$ , para un proceso FC, difieren significativamente de sus respectivos valores  $V_{Tot}$ . Se concluye entonces que se trata de medidas muy efectivas, que aportan información adicional relevante al conocimiento de la dispersión en la velocidad de respuesta de una carta. En cambio, la  $V_{Tot}$  la mantiene oculta, distorsionando de este modo la realidad de lo que debe esperarse del desempeño de la carta. Para un proceso BC, la  $V_{Izq}$



proporciona información sustancial para comprender cuánto más temprana puede llegar a ser una señal de falsa alarma en relación a lo que se espera (LCP). Por otra parte, para un proceso FC, la VDer permite comprender cuánto más tardía puede llegar a ser una señal de salida de control en relación a su valor esperado (LCP).

En adición, para evaluar el comportamiento de una carta frente a un proceso FC, su uso es particularmente recomendable cuando las características del control son: monitoreo mediante la toma de muestras y/o el interés recae en la detección de corrimientos  $D$  grandes.

### **Casos ilustrativos del uso de los criterios CC y CNC para evaluar la performance de una Carta de Control**

En virtud de lo visto, a la hora de comparar el comportamiento de varios diseños de cartas frente a un proceso FC, es de esperar que las conclusiones basadas en el criterio CNC difieran de algún modo con aquellas basadas en el criterio CC. En los casos ilustrativos que siguen, se resaltan las ventajas del criterio CNC al aportar información sumamente útil sobre la variabilidad de la LC de una Carta de Control que no brinda el criterio CC sino, por el contrario, la mantiene oculta.

En opinión de los autores, el CC tiende a confundir acerca de qué se debe esperar sobre la variabilidad de la LC de la carta, dado que mezcla las desviaciones de las LC inferiores y superiores a LCP, ocultando así el principal componente, el de la variabilidad desfavorable.

**Caso 1. Comparación de S1 con S4:** *Frente a un proceso en estado BC*, recorriendo en las tablas 1 a 7 las columnas encabezadas por S1 y S4. La conclusión que surge de uno u otro criterio es que ambas cartas presentan idéntica performance, lo que era de esperarse por dos motivos: los límites de control ajustados para producir la misma LCP y la naturaleza propia de las cartas de Shewhart. Sin embargo, existe una diferencia destacable entre ambos criterios: el CC reporta una VTot del 99% mientras que, el CNC, una Vlzq del 64%; luego, la variabilidad desfavorable es sensiblemente menor a la percibida de la lectura de VTot. En conclusión, el criterio CNC aporta más información sobre el real desempeño de las cartas.

*Frente a un proceso en estado FC*, observando las figuras 4 y 5, las conclusiones que surgen de la aplicación de uno u otro criterio son similares, pero existe una diferencia que vale la pena destacar, especialmente para corrimientos  $D > 1\sigma$ . En principio, cualquiera sea el criterio usado, las razones  $LCP_{S4}(D)/LCP_{S1}(D)$ ,  $VDer_{S4}(D)/VDer_{S1}(D)$  y  $VTot_{S4}(D)/VTot_{S1}(D)$  son significativamente inferiores a la unidad para todo corrimiento  $D$ , luego el uso de muestras aumenta la velocidad de la carta Shewhart y disminuye su variabilidad tanto la total como la lateral desfavorable, mejorando así su performance.

Sin embargo, según el criterio CC, el uso de muestras reduce abruptamente la VTot para corrimientos  $D > 1\sigma$ . Mientras que, según el criterio CNC, la información adicional que aporta es que, para ese mismo rango de corrimientos  $D$ , la reducción en la variabilidad desfavorable es de apenas un 30 % máximo. Aunque, observando la figura 6, para los mismos corrimientos, la relación  $PCL_{S4}(D)/PCL_{S1}(D)$  es inferior a 1 y decrece abruptamente. Esto significa que el uso de muestras hace más veloz a la carta Shewhart y disminuye levemente su variabilidad desfavorable, pero se ve compensada con una reducción abrupta en la probabilidad de ocurrencia de una corrida larga o muy larga.

**Caso 2. Comparación de C1 con C4:** *Frente a un proceso en estado BC*, recorriendo en las tablas 1 a 7 las columnas encabezadas por C1 y C4, la conclusión que surge de uno u otro criterio es que las cartas presentan similar performance, con una suave diferencia en

la variabilidad ( $VTot$  o  $Vl_{zq}$ ): el uso de muestras la aumenta levemente, especialmente para corrimientos pequeños ( $D \leq 1\sigma$ ). Sin embargo, análogo al Caso 1, el criterio CNC aporta más información al señalar una variabilidad desfavorable máxima del 64%, contra una variabilidad total máxima del 99% que reporta el CC.

*Frente a un proceso en estado FC*, de las figuras 7 y 8, para corrimientos pequeños ( $D \leq 1.5\sigma$ ), las conclusiones que surgen de la aplicación de uno u otro criterio son similares: las razones  $LCP_{C4}(D)/LCP_{C1}(D)$ ,  $VDer_{C4}(D)/VDer_{C1}(D)$  y  $VTot_{C4}(D)/Tot_{C1}(D)$  son significativamente inferiores a uno; luego, el uso de muestras mejora la performance de la carta CUSUM.

Para corrimientos grandes ( $D > 1.5\sigma$ ), sin embargo, destacamos cómo el criterio CC oculta información relevante distorsionando la realidad acerca de qué esperar con respecto a la variabilidad de la LC. Según el criterio CC, el uso de muestras en la carta CUSUM mejora su performance, al hacerla más veloz y menos variable que cuando se usan individuales, pues la relación  $VTot_{C4}(D)/VTot_{C1}(D)$  es significativamente inferior a 1.

En cambio, según el criterio CNC, si bien la carta C4 es más veloz que la carta C1, la variabilidad desfavorable va en sentido contrario a la total, para corrimientos grandes ( $D > 1.5\sigma$ ) crece abruptamente dado que la relación  $VDer_{C4}(D)/VDer_{C1}(D)$  es significativamente superior a 1. A pesar de ello, observando la Figura 9, para los mismos corrimientos ( $D > 1.5\sigma$ ), la relación  $PCL_{C4}(D)/PCL_{C1}(D)$  es inferior a 1 y decrece también abruptamente. Esto significa que, para corrimientos grandes, el uso de muestras acelera la velocidad de respuesta de la carta CUSUM, aumentando considerablemente su variabilidad (desfavorable), pero también disminuye, con el mismo tenor, la probabilidad de ocurrencia de una corrida larga o muy larga.

## CONCLUSIONES FINALES

Los casos ilustrados representan algunos ejemplos que se han querido mostrar para señalar las diferencias que pueden presentarse en las conclusiones sobre la performance de las Cartas de Control, cuando el análisis se basa en uno u otro criterio. Para comparaciones con otros diseños de cartas, pueden presentarse diferencias de mayor o menor grado a las mostradas.

La evaluación del desempeño de una Carta de Control, basada en el criterio CNC presentado en este trabajo, es más eficiente porque aporta información útil y más completa que aquel basado en el criterio CC. Al tener en cuenta el componente de variación de la LC, que contribuye negativamente a engrosar la  $VTot$ , diagnostica con mayor precisión el comportamiento que es de esperar que tenga la carta en su velocidad de respuesta. Resaltando este aspecto se puede realizar una elección más acertada, que esté basada en una carta cuyo diseño esté provisto de una variabilidad lateral desfavorable más atenuada.

Este trabajo pretende ser un aporte a la Ingeniería Industrial para contribuir a una toma de decisiones más eficiente en el Control Estadístico de Procesos.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

**Chakraborti, S. & Human S. (2006).** Parameter Estimation and Performance of the p-chart for Attributes Data. *IEEE Transactions on Reliability*, 55(3), 559-566

**Chakraborti, S. (2007).** Run Length Distribution and Percentiles: The Shewhart Xbar Chart with Unknown Parameters. *Quality Engineering*, 19(2), 119-127

**Fu, J., Shmueli, G. & Chang, Y. (2003).** A unified Markov chain approach for computing the run length distribution in control charts with simple or compound rules. *Statistics & Probability letters*, 65, 457-466

**Govindaraju, K. (2005).** Statistical Performance of Control Charts. *Economic Quality Control*, 20 (1), 5-20

**Govindaraju, K. & Zhang, L. (2006).** A Note on Run Length Variability Reduction for EWMA Charting. *Economic Quality Control*, 21(2), 171-181

**Gutiérrez P, H. & de la Vara S, R. (2004).** *Control Estadístico de Calidad y Seis Sigma*. México: Mc Graw Hill Interamericana Editores

**Hawkins, D. & Olwell, D. (1998).** *Cumulative Sum Charts and Charting for Quality Improvement*. New York: Springer-Verlag

**Lucas, J. & Crosier, R. (2000).** Fast Initial Response for CUSUM Quality-Control Schemes: Give your CUSUM a Head Start. *Technometrics*, 42 (1), 102-107

**Luceño, A. & Puig-Pey, J. (2000).** Evaluation of the Run-Length Probability Distribution for Cusum Charts: Assessing Chart Performance. *Technometrics*, 42(4), 411-416

**Montgomery, D. (2004).** *Control Estadístico de la Calidad*. México: Limusa-Wiley

**Quintana, A., García, L. & Casal, R. (2009).** Medidas de Resumen para evaluar la Performance de una Carta de Control para cada estado de un proceso. Su aplicación a Cartas de Shewhart y Cusum. *Revista de la Escuela de Perfeccionamiento en Investigación Operativa*, XVII(30), 39-58.

**Radson, D. & Hancock B, A. (2005).** Graphical Representation of Run Length Distributions. *Quality Engineering*, 17(2), 301-308

**Ryan, T. (2011).** *Statistical Methods for Quality Improvement*. Third Edition. New Jersey: John Wiley & Sons